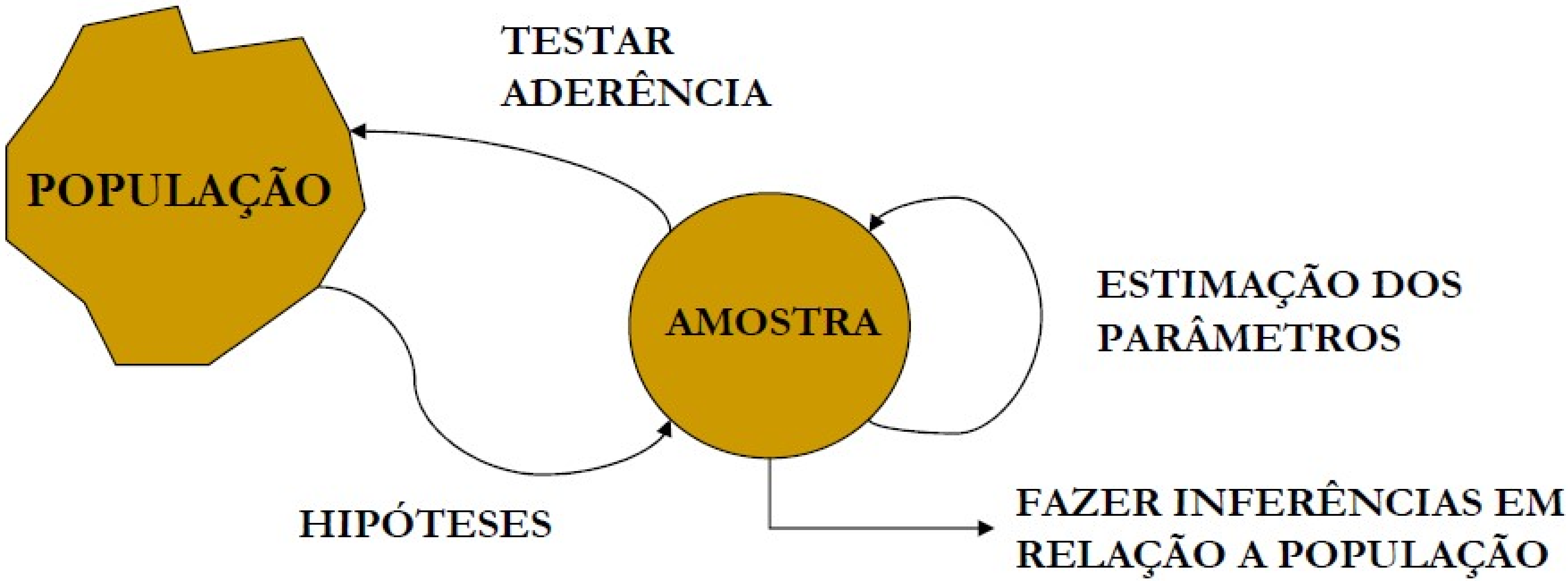
PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Professor: Mauri A. Oliveira

mauriao2@gmail.com

TESTE DE HIPÓTESES

O Processo de Inferência



- Hipóteses: - iid $\Rightarrow$ Amostra aleatória

  - Distribuições populacional e amostral (TLC)

  - Parâmetros conhecidos ou não (σ)

Teste de Hipóteses: Princípios

- O teste de hipóteses é utilizado quando objetiva-se decidir qual de duas alegações contraditórias, sobre o valor de um parâmetro, está correta.
- Hipótese estatística (hipótese) é uma afirmação sobre os valores de parâmetros ou sobre a forma de uma distribuição de probabilidade.
- Em um teste de hipóteses há sempre 2 hipóteses contraditórias sendo consideradas.
  - Ex: Tempo médio de atendimento = 300h ou $\neq$ 300h
    Fatia de mercado $\geq$ 15% ou $<$ 15%.

OBJETIVO: DEFINIR, A PARTIR DAS INFORMAÇÕES AMOSTRAIS, QUAL DAS DUAS ESTÁ CORRETA.

Teste de Hipóteses: Princípios

- Def: Hipótese nula (H_0) é a afirmação assumida inicialmente como verdadeira e Hipótese alternativa (H_A) é a afirmação que contradiz H_0.
- Como H_0 é considerada verdadeira, se não houver alguma evidência forte na amostra que a contradiga, as duas conclusões possíveis são: Rejeitar H_0 ou Não Rejeitar H_0.
- Em síntese: utilizaremos dados amostrais para decidir se H_0 deve ou não ser rejeitada.

Teste de Hipóteses: Procedimento

- Se θ representar o parâmetro de interesse:

i. Definir as hipóteses:

$$H_0: \theta = \theta_0 \qquad H_0: \theta \geq \theta_0 \qquad H_0: \theta \leq \theta_0$$

$$H_A: \theta \neq \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_A: \theta < \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_A: \theta > \theta_0$$

ii. Cálculo da estatística do teste;

iii. Verificar as regiões de rejeição (valores para os quais H_o será rejeitada);

iv. Tomar a decisão (rejeitar ou não H_0).

Assim, a hipótese nula será rejeitada se, e somente se, o valor da estatística do teste cair na região de rejeição.

Teste de Hipóteses: Média

- Os conceitos básicos do teste de hipóteses são introduzidos mais facilmente enfocando primeiro uma situação simples (**CASO A**):

    - O parâmetro de interesse é a média populacional (μ)

    - A distribuição da população é normal

    - O valor do desvio-padrão (σ) é conhecido.

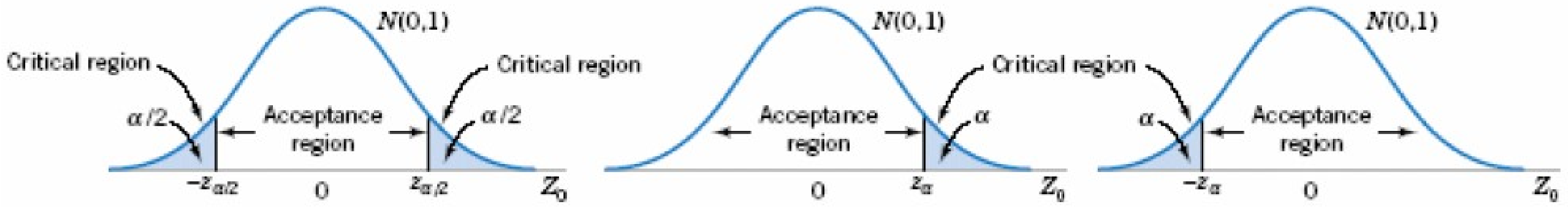
- Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal com $E[x] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$. Neste caso, independentemente do tamanho da amostra (n):

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \begin{cases} \mu_{\bar{x}} = \mu \\ \sigma^2_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

Teste de Hipóteses: CASO A

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z(0,1) \longrightarrow Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$H_0: \mu = \mu_0$
 $H_1: \mu \neq \mu_0$ ou $H_0: \mu \leq \mu_0$
 $H_1: \mu > \mu_0$ ou $H_0: \mu \geq \mu_0$
 $H_1: \mu < \mu_0$



SIGNIFICÂNCIA	$Z_{\alpha/2}$	Z_{α}
10%	1,645	1,285
5%	1,96	1,645
1%	2,575	2,328

Teste de Hipóteses: CASO A

Embora a suposição de que o valor do σ seja conhecido raramente é encontrado na prática, este caso fornece um bom ponto de partida devido à facilidade com os procedimentos gerais e suas propriedades podem ser desenvolvidos.

As hipóteses nulas em todos os três casos indicarão que o μ possui um valor numérico particular, que denotaremos por μ_0.

Teste de Hipóteses: CASO A

- Exemplo: Um fabricante de lâmpadas afirma que o tempo médio de vida de seu produto é normalmente distribuído com média de 800h e desvio-padrão de 40h. Uma amostra de n=30 lâmpadas foram testadas obtendo-se um tempo médio de vida de 788h. Esses dados contradizem a afirmação do fabricante (significância de 1%)?
- Passos: 1. Definir H_o e H_1

  2. Fixar α

  3. Determinar as regiões de rejeição

  4. Calcular a estatística do teste

  5. Conclusão

Teste de Hipóteses: Média

- **Teorema Central do Limite**: Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição qualquer com média μ e com variância σ^2. Se n é suficientemente grande, então:

$$\bar{x} \dot{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \begin{cases} \mu_{\bar{x}} = \mu \\ \sigma^2_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

$$To \dot{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

Obs: qto. maior for o valor de n, melhor será a aproximação (n>30)

→ **CASO B** : Se σ^2 não é conhecido e n é grande

→ **CASO C:** Se σ^2 não é conhecido e n é pequeno

(distribuição normal)

Teste de Hipóteses: CASO B

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim Z \longrightarrow Z = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

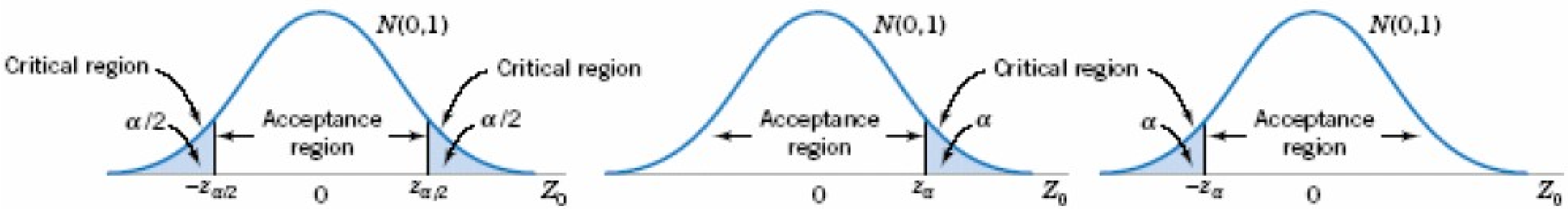
$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu \neq \mu_0$

ou

$H_0: \mu \leq \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$

ou

$H_0: \mu \geq \mu_0$
$H_1: \mu < \mu_0$



SIGNIFICÂNCIA	$Z_{\alpha/2}$	Z_{α}
10%	1,645	1,285
5%	1,96	1,645
1%	2,575	2,328

Quando o tamanho da amostra é grande, os testes *z* do **Caso A** são facilmente modificados para produzir procedimentos de teste válidos sem exigir uma distribuição de população normal ou um σ conhecido.

O resultado chave foi usado para justificar intervalos de confiança de amostras grandes. Um *n* grande implica que a variável padronizada

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

tem aproximadamente uma distribuição normal padrão.

A substituição do valor μ_0 no lugar de μ produz a estatística de teste

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

que tem aproximadamente uma distribuição normal padrão quando H_0 é verdadeira.

O uso de regiões de rejeição dadas anteriormente para o **Caso A** resulta em procedimentos de teste para os quais o nível de significância é aproximadamente (em vez de exatamente) α.

A regra geral $n>40$ será usada novamente para caracterizar um tamanho de amostra grande.

Teste de Hipóteses: CASO B

- Exemplo: um fabricante de pneus afirma que o tempo médio de vida de seu produto é de 40.000 km. Uma amostra de n=64 pneus foram testados obtendo-se um tempo médio de vida de 38.000 km com desvio-padrão de 16.000 km. Esses dados contradizem a afirmação do fabricante (significância de 1%)?
- Passos: 1. Definir H_o e H_1

  2. Fixar α

  3. Determinar as regiões de rejeição

  4. Calcular a estatística do teste

  5. Conclusão

Teste de Hipóteses: CASO C

- **Quando n é pequeno e a distribuição é aproximadamente Normal**

$$\bar{x} \sim t\left(\mu, \frac{s^2}{n}\right) \longrightarrow T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

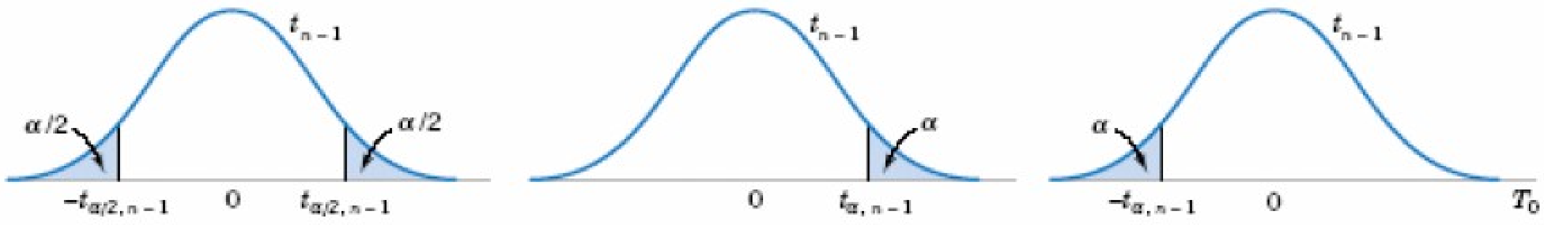
,se distribui conforme uma t com k = n-1 g.l.

The One-Sample t-Test

Null hypothesis: H_0: $\mu = \mu_0$

Test statistic: $T_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

Alternative hypothesis	Rejection criteria
H_1: $\mu \neq \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$ or $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$
H_1: $\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$
H_1: $\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$



Quando n é pequeno, o Teorema Central do Limite não pode ser invocado para justificar o uso de um teste de amostra grande.

Enfrentamos essa mesma dificuldade na obtenção de um intervalo de confiança de amostra pequena para μ.

Nossa abordagem aqui será a mesma usada lá:
- Assumiremos que a distribuição da população é pelo menos aproximadamente normal e descrevemos os procedimentos de teste cuja validade se baseia nessa suposição.

Teste de Hipóteses: CASO C

t Distribution						
	α					
Degrees of freedom	.005 (one tail) .01 (two tails)	.01 (one tail) .02 (two tails)	.025 (one tail) .05 (two tails)	.05 (one tail) .10 (two tails)	.10 (one tail) .20 (two tails)	.25 (one tail) .50 (two tails)
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	.683
Large (z)	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	.675

Teste de Hipóteses: CASO C

- Exemplo: um fabricante de sprinklers afirma que a temperatura média de ativação de seu produto é de 130º F. Uma amostra de n=9 produtos foram testados obtendo-se uma temperatura média de ativação de 131,08º F com desvio-padrão de 1,5º F. Esses dados contradizem a afirmação do fabricante (significância de 5%)?

Distribuição da diferença entre médias

- Sejam A e B duas populações:

  i. normais com parâmetros conhecidos: CASO A

$$\bar{x}_A \sim N\left(\mu_A, \sigma_A^2/n_A\right),\ \bar{x}_B \sim N\left(\mu_B, \sigma_B^2/n_B\right) \Rightarrow \bar{x}_A - \bar{x}_B \sim N\left(\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\right)$$

  ii. quaisquer com parâmetros conhecidos ou não (n grande) : CASO B

$$\bar{x}_A \dot{\sim} N\left(\mu_A, \sigma_A^2/n_A\right),\ \bar{x}_B \dot{\sim} N\left(\mu_B, \sigma_B^2/n_B\right) \Rightarrow \bar{x}_A - \bar{x}_B \dot{\sim} N\left(\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\right)$$

  iii. normais com parâmetros não conhecidos e n pequeno: CASO C

$$\left(\bar{x}_A - \mu_A\right)/s_A/\sqrt{n_A} \sim t_{n_A-1},\ \left(\bar{x}_B - \mu_B\right)/s_B/\sqrt{n_B} \sim t_{n_B-1}$$

$$\Rightarrow \left(\left(\bar{x}_A - \bar{x}_B\right) - \left(\mu_A - \mu_B\right)\right)\Big/\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} \sim t_{(n_A+n_B)-2}$$

Distribuição da diferença entre médias

CASO A:

$$\frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim Z$$

CASO B (OPÇÃO 1):

$$\frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}} \dot{\sim} Z$$

CASO B (OPÇÃO 2):

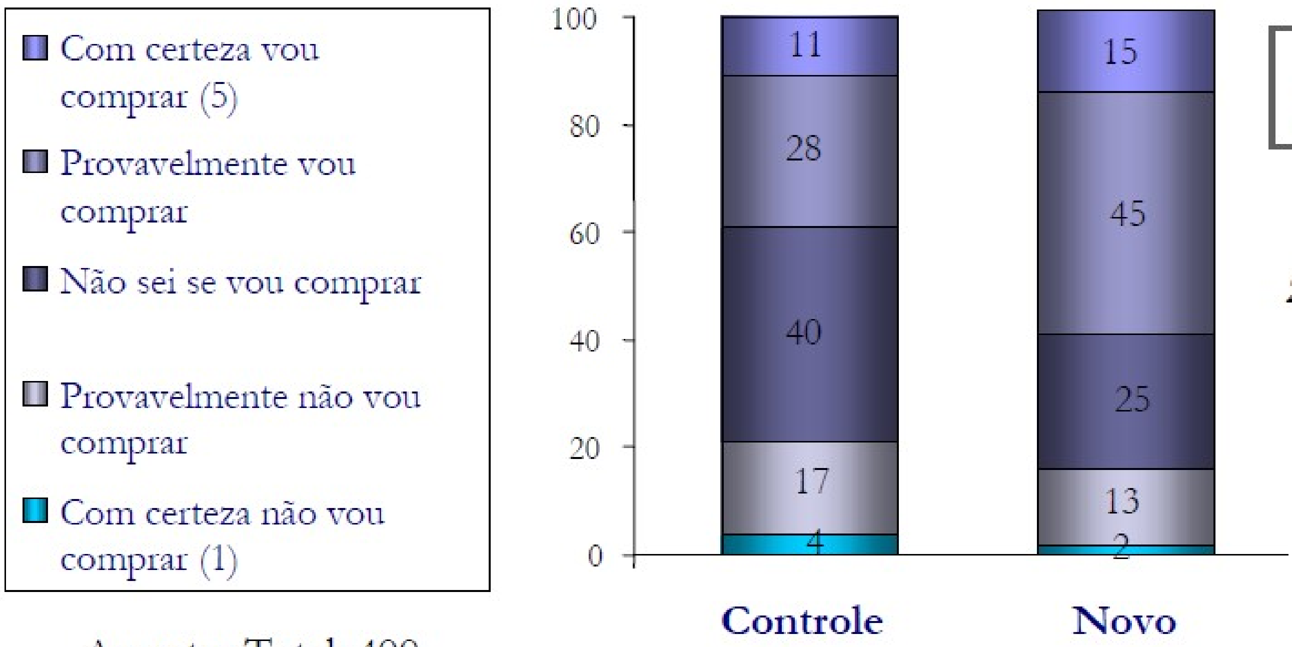
$$\frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\dfrac{s_A^2}{n_A} + \dfrac{s_B^2}{n_B}}} \dot{\sim} Z$$

CASO C:

$$\frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\dfrac{s_A^2}{n_A} + \dfrac{s_B^2}{n_B}}} \sim t_{n_A + n_B - 2}$$

Teste de produto

Intenção de Compra



Amostra Total: 400

Padrão de Ação
Média Novo > Controle (95%)

$$z = \frac{3{,}58 - 3{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}86}{400} + \frac{0{,}99}{400}}} = 4{,}85$$

como $z > z_{crítico}$ a intenção de compra do novo produto é maior (95%)

CONTROLE: $\bar{x} = (44 * 5 + 112 * 4 + 160 * 3 + 68 * 2 + 16 * 1) \,/\, 400 = 3{,}25$

$s^2 = (44 * (5-3{,}25)^2 + 112 * (4-3{,}25)^2 + \ldots + 16 * (1-3{,}25)^2) \,/\, 399 = 0{,}99$

NOVO: $\bar{x} = (60 * 5 + 180 * 4 + 100 * 3 + 52 * 2 + 8 * 1) \,/\, 400 = 3{,}58$

$s^2 = (60 * (5-3{,}58)^2 + 180 * (4-3{,}58)^2 + \ldots + 86 * (1-3{,}58)^2) \,/\, 399 = 0{,}86$

Teste de Hipóteses: Proporção

- Se X~Bin(n,p) em que n é relativamente grande (n≥30) e n.p.(1-p)>5 pode ser aproximada à uma Normal com μ = n.p e σ^2 =n.p.(1-p), ou seja,

$$\frac{x - n.p}{\sqrt{n.p.(1-p)}} \sim N(0,1) \longrightarrow Z_0 = \frac{P - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

$$p \sim N\left(\hat{p}, \frac{p(1-\hat{p})}{n}\right)$$

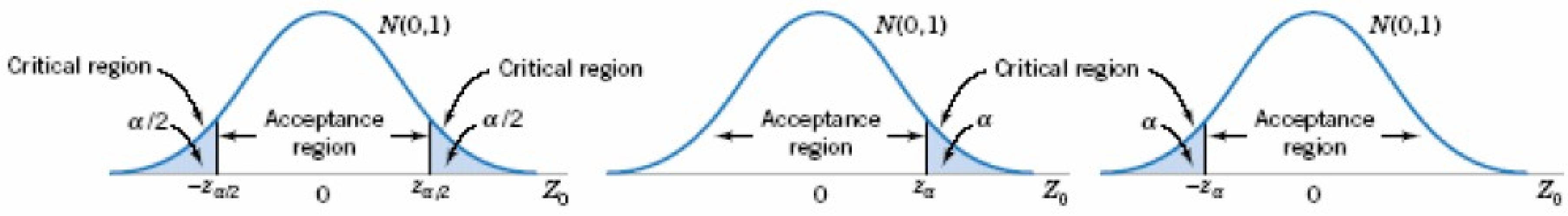
$$H_0: p = p_0 \qquad H_1: p \neq p_0$$

ou

$$H_0: p = p_0 \qquad H_1: p > p_0$$

ou

$$H_0: p = p_0 \qquad H_1: p < p_0$$



Teste de Hipóteses: Proporção

- Exemplo: Uma pesquisa de mercado com 90 consumidores mostrou que o market-share de uma empresa é de 45%. É possível afirmar que ela é líder de mercado (significância de 1%)?

- Passos: 1. Definir H_o e H_1

  2. Fixar α

  3. Determinar as regiões de rejeição

  4. Calcular a estatística do teste

  5. Conclusão

Teste de Hipóteses: Variância

- Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal com $E[x] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$. Para testar se $\sigma^2 = \sigma^2_0$ faz-se:

- Hipóteses e regiões de rejeição:

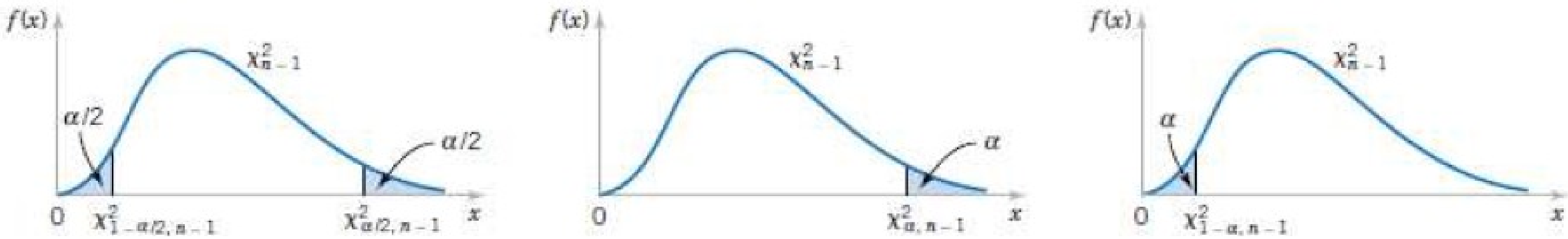
$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

ou

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

ou

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$



- Estatística do teste: $$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Teste de Hipóteses: Variância

- Exemplo: Um fabricante de baterias afirma que a vida útil delas tem distribuição aproximadamente normal com desvio-padrão de 0,9 ano. Se uma amostra aleatória de 10 dessas baterias tem desvio-padrão de 1,25 anos, você acha que $\sigma > 0,9$? (significância de 5%)?

- Passos: 1. Definir H_o e H_1

  2. Fixar α

  3. Determinar as regiões de rejeição

  4. Calcular a estatística do teste

  5. Conclusão

Erros em Testes de Hipóteses

- Def: Um erro tipo I consiste em rejeitar H_o quando ela é verdadeira e P(erro tipo I) = α
- Def: Um erro tipo II consiste em não rejeitar H_o quando ela é falsa e P(erro tipo II) = β

Proposição: Suponha que um experimento e o tamanho da amostra sejam fixos. Então, reduzir o tamanho da região de rejeição para obter um valor menor de α resulta em um valor maior de β. Portanto, não há como tornar, simultâneamente, α e β menores.

Teste de Hipóteses: Erros Tipo I e II

	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não Rejeito H_0	OK $1-\alpha$	P(ErroTipo II) β
Rejeito H_0	P(ErroTipo I) α = nível de significância	OK $1-\beta$ = poder do teste

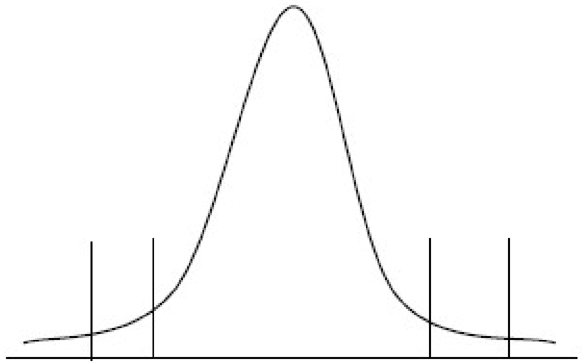
Teste de Hipóteses: Erros Tipo I e II

H_0: Réu é inocente
H_a: Réu é culpado

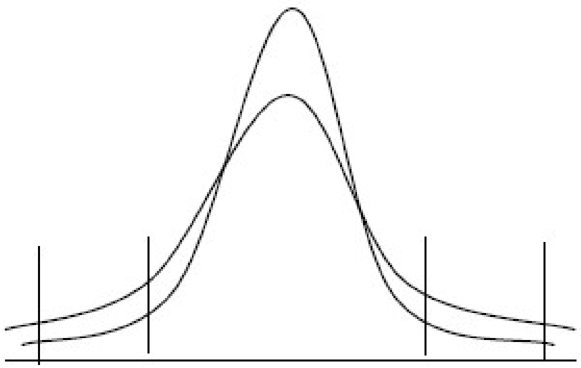
	O réu pode ser:	
	Réu inocente	Réu culpado
O juiz pode:		
Absolver o réu	OK $1-\alpha$	P(ErroTipo II) β
Condenar o réu	P(ErroTipo I) α	OK $1-\beta$

Gerenciamento dos Erros Tipo I e II

Erro Tipo I:

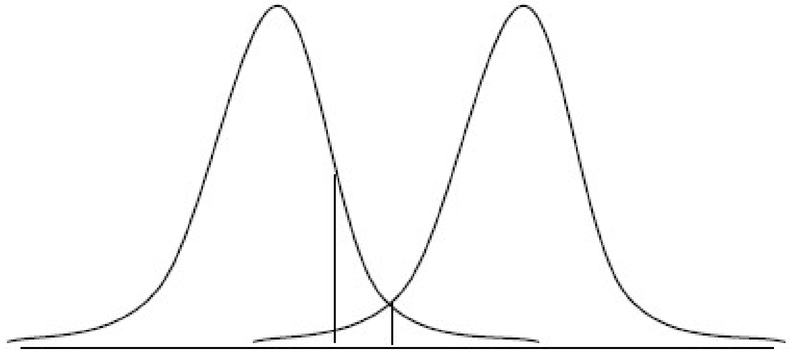


$\downarrow \alpha \Rightarrow \downarrow$ Erro Tipo I

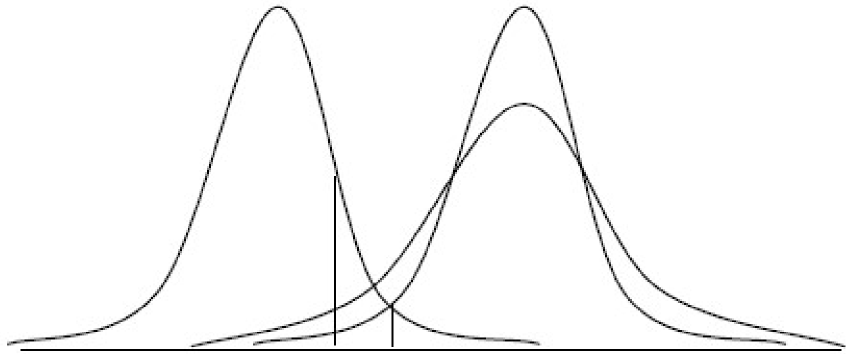


$\uparrow n \Rightarrow \downarrow$ Erro Tipo I

Erro Tipo II:



$\uparrow \alpha \Rightarrow \downarrow$ Erro Tipo II



$\uparrow n \Rightarrow \downarrow$ Erro Tipo II

Escolha do nível de significância

- Vou substituir um componente de meu produto por outro **mais caro** se isto o tornar **melhor** na percepção do consumidor.
- **Consequências do Erro Tipo I**: Perda do investimento, perda de margem ou de share
- **Consequências do Erro Tipo II:** perda da oportunidade de ganho competitivo

- Vou substituir um componente de meu produto por outro **mais barato** se isto não o tornar pior na percepção do consumidor.
- **Consequências do Erro Tipo I**: perda da oportunidade de aumentar a margem ou ganhar share.
- **Consequências do Erro Tipo II:** perda de share, de imagem, etc